6.1 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΘΕΩΡΙΑ

1.

Ορισμός της συνάρτησης

Συνάρτηση από ένα σύνολο Α σε ένα σύνολο Β λέγεται μια διαδικασία (κανόνας – τρόπος), με την οποία κάθε στοιχείο του συνόλου Α αντιστοιχίζεται σε ένα ακριβώς στοιχείο του συνόλου Β.

2.

Συμβολισμός της συνάρτησης

Η συνάρτηση συμβολίζεται $f: A \to B$ και διαβάζεται
«συνάρτηση f από το σύνολο Α στο σύνολο Β»

3.

Πεδίο ορισμού

Στη συνάρτηση $f: A \to B$, το σύνολο Α λέγεται **πεδίο ορισμού**, συμβολίζεται δε και D_f

4.

Η ανεξάρτητη μεταβλητή x

Στη συνάρτηση $f: A \to B$, κάθε στοιχείο του πεδίου ορισμού Α, συνήθως, συμβολίζεται με τη μεταβλητή x, η οποία λέγεται **ανεξάρτητη μεταβλητή**.

5.

Η μεταβλητή y

Στη συνάρτηση $f: A \to B$, κάθε στοιχείο του συνόλου Β, συνήθως, συμβολίζεται με τη μεταβλητή y.

6.

Τιμή της f στο x

Στη συνάρτηση $f: A \to B$, κάθε στοιχείο y του συνόλου Β, στο οποίο αντιστοιχίζεται στοιχείο x του πεδίου ορισμού Α , λέγεται **τιμή της f στο x** και συμβολίζεται f(x).

7.

Η εξαρτημένη μεταβλητή y

Στη συνάρτηση $f: A \to B$, **εξαρτημένη μεταβλητή** λέγεται η μεταβλητή y, όταν συμβαίνει $y = f(x)$.

8.

Το σύνολο τιμών

Στη συνάρτηση $f: A \to B$, όλες οι τιμές της f, σε ένα τσουβάλι, αποτελούν ένα σύνολο (υποσύνολο του B), που λέγεται **σύνολο τιμών** της f και συμβολίζεται $f(A)$

9.

Πραγματική συνάρτηση πραγματικής μεταβλητής

Στο εξής, για συνάρτηση $f: A \to B$,

i) το σύνολο B θα είναι το $\mathbb{R}$

ii) το πεδίο ορισμού A θα είναι το ευρύτερο υποσύνολο του $\mathbb{R}$, για τα x του οποίου η τιμή $f(x)$ είναι πραγματικός αριθμός.

10.

Τύπος συνάρτησης f λέγεται η ισότητα $y = f(x)$, που καθορίζει τον τρόπο αντιστοίχισης.

ΣΧΟΛΙΑ – ΜΕΘΟΔΟΙ

1.

Η αντιστοιχία

είναι έννοια θεμελιώδης, δηλαδή δεν ορίζεται (όπως η έννοια «ευθεία»).
Πρέπει, όμως, όλοι να τη διαισθανόμαστε με ίδιο περιεχόμενο.

Π.χ Έστω A το σύνολο των μαθητών της τάξης μας και B το σύνολο των καρεκλών της αίθουσάς μας.
Υπάρχει μια αντιστοιχία από το σύνολο A στο σύνολο B, κατά την οποία κάθε μαθητής κάθεται σε μία ακριβώς καρέκλα.

2.

Διευκρίνιση

Η συνάρτηση είναι αντιστοιχία.
Η αντιστοιχία μπορεί να είναι συνάρτηση, μπορεί και να μην είναι.

3.

Άμεση συνέπεια από τον ορισμό

Στη συνάρτηση $f: A \to B$, λειτουργούν

α) όλα τα στοιχεία του συνόλου A

β) όχι κατ' ανάγκη όλα τα στοιχεία του B

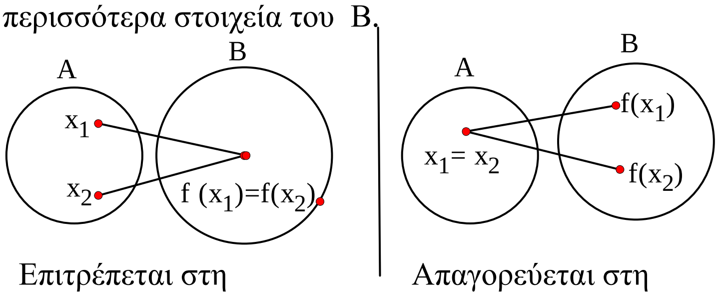
4.

Άμεση συνέπεια από τον ορισμό

Στη συνάρτηση $f: A \to B$,

α) επιτρέπεται διαφορετικά στοιχεία του A να αντιστοιχίζονται στο ίδιο στοιχείο του B

β) απαγορεύεται κάποιο στοιχείο του A να αντιστοιχίζεται σε δύο ή περισσότερα στοιχεία του B.



Επιτρέπεται στη συνάρτηση

Απαγορεύεται στη συνάρτηση

5.

Μαθηματική έκφραση του (4)

Στη συνάρτηση $f: A \to B$,

α) Αν $x_1 = x_2$ τότε $f(x_1) = f(x_2)$. **Προσοχή,** όχι αντίστροφα.

β) Αν $f(x_1) \neq f(x_2)$ τότε $x_1 \neq x_2$

6.

Εύρεση του πεδίου ορισμού

Όταν το πεδίο ορισμού δε δίνεται, πρέπει να το βρίσκουμε πριν από οποιαδήποτε άλλη ενέργεια, ακόμη και αν δε μας το ζητάνε.

Για να βρούμε το πεδίο ορισμού D_f **:**

α) Παρανομαστές $\neq 0$

β) Υπόριζα μη αρνητικά

γ) Σε κάθε άλλη περίπτωση είναι $D_f = \mathbb{R}$. (Για την Α΄ τάξη)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Έστω A το σύνολο των τερματοφυλάκων που ανήκουν στις ποδοσφαιρικές αμάδες της Α΄ εθνικής κατηγορίας και B το σύνολο των ποδοσφαιρικών αμάδων της Α΄ εθνικής κατηγορίας .

Υπάρχει συνάρτηση από το σύνολο A στο σύνολο B ;

Ορισμός συνάρτησης

Απάντηση

Ναι, υπάρχει συνάρτηση, αφού κάθε στοιχείο x (τερματοφύλακας) του συνόλου A αντιστοιχίζεται (ανήκει) σε μία ακριβώς ομάδα του συνόλου B.

2.

Έστω το σύνολο $A = \{1,\ 4,\ 5,\ -3\}$ και η αντιστοιχία

$[1 \to 2,\quad 4 \to 8,\quad 5 \to 10,\quad -3 \to -6]$

Ορίζεται συνάρτηση ; Και αν ναι, ποιος είναι ο τύπος της ;

Απάντηση

Ναι, ορίζεται συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$, αφού κάθε στοιχείο $x \in A$ αντιστοιχίζεται σε ένα ακριβώς $y \in \mathbb{R}$, συγκεκριμένα στο $y = 2x$.

Ο τύπος της f είναι $f(x) = 2x$

3.

Έστω το σύνολο $A = \{1,\ 4,\ 5,\ -3\}$ και η αντιστοιχία

$[1 \to 2,\quad 4 \to 8,\quad 5 \to 10,\quad -3 \to -6,\quad 4 \to 20]$

Ορίζεται συνάρτηση ;

Σχόλιο 4 ii)

Απάντηση

Όχι, δεν ορίζεται συνάρτηση, αφού ένα τουλάχιστον στοιχείο (το 4) του συνόλου Α αντιστοιχίζεται σε δύο στοιχεία (στο 8 και στο 20) του $\mathbb{R}$.

4.

Η ισότητα $y = 3x^2$ με $x \in \mathbb{R}$ ορίζει συνάρτηση f ;

Αν ναι, ποια είναι η τιμή της f στο 0, 1, –2, x_1, α, αντίστοιχα.

Απάντηση

Ναι, ορίζει συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, αφού κάθε στοιχείο $x \in \mathbb{R}$ αντιστοιχίζεται σε ένα ακριβώς $y \in \mathbb{R}$, συγκεκριμένα στο $3x^2$.

Ο τύπος της f είναι $f(x) = 3x^2$

$f(0) = 3\cdot 0^2 = 3\cdot 0 = 0$

$f(1) = 3\cdot 1^2 = 3\cdot 1 = 3$

$f(-2) = 3(-2)^2 = 3\cdot 4 = 12$

$f(x_1) = 3x_1^2$

$f(\alpha) = 3\alpha^2$

5.

Δικαιολογήστε, γιατί η ισότητα $y^2 = x$ με $x > 0$ δεν ορίζει συνάρτηση.

Απάντηση

Σχόλιο 4 ii)

Η ισότητα $y^2 = x$ γράφεται $y = \sqrt{x}$ ή $y = -\sqrt{x}$.

Άρα το τυχαίο x αντιστοιχίζεται σε δύο y, συγκεκριμένα στα $\sqrt{x}$, $-\sqrt{x}$, που απαγορεύεται στη συνάρτηση.

6.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x + 1$, $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε εκείνο το x, το οποίο αντιστοιχίζεται στο 7, και τις τιμές $f(3x)$, $f(-x + 1)$, $f(x^2)$

Προτεινόμενη λύση

$f(x) = 7 \iff 2x + 1 = 7$

$2x = 6$

$x = 3$ Άρα το 3 αντιστοιχίζεται στο 7

$f(3x) = 2(3x) + 1 = 6x + 1$

$f(-x + 1) = 2(-x + 1) + 1 = -2x + 2 + 1 = -2x + 3$

$f(x^2) = 2x^2 + 1$

7.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

Να βρείτε εκείνο το x το οποίο αντιστοιχίζεται στο 10,

και τις τιμές $f(-x)$, $f\left(\frac{x}{2}\right)$, $f(x - 1)$

Προτεινόμενη λύση

$f(x) = 10 \iff x^2 + 1 = 10$

$x^2 = 9$

$x = 3$ ή $x = -3$ Άρα τα 3, -3 αντιστοιχίζονται στο 10

$f(-x) = (-x)^2 + 1 = x^2 + 1$

$f\left(\frac{x}{2}\right) = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + 1 = \frac{x^2}{4} + 1$

$f(x - 1) = (x - 1)^2 + 1 = x^2 - 2x + 1 + 1 = x^2 - 2x + 2$

8.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & \text{αν } x<0 \\ x^2+1, & \text{αν } x\geq 0 \end{cases}$

i) Να βρείτε τις τιμές $f(-3)$, $f(0)$, $f(3)$

ii) Να βρείτε εκείνο το x , το οποίο αντιστοιχίζεται

α) στο -2 β) στο 5 γ) στο $\frac{1}{2}$

Προτεινόμενη λύση

i)

$f(-3) = 2(-3) + 1 = -6 + 1 = -5$

$f(0) = 0^2 + 1 = 1$

$f(3) = 3^2 + 1 = 9 + 1 = 10$

ii)

α) Αν το ζητούμενο x είναι < 0, θα πρέπει $2x + 1 = -2$

$2x = -3$

$x = -\frac{3}{2}$

β) Αν το ζητούμενο x είναι < 0, θα πρέπει $2x + 1 = 5$

$2x = 4$

$x = 2$ άτοπο

Αν το ζητούμενο x είναι ≥ 0, θα πρέπει $x^2 + 1 = 5$

$x^2 = 4$

$x = 2$

γ) Αν το ζητούμενο x είναι < 0, θα πρέπει $2x + 1 = \frac{1}{2}$

$2x = -\frac{1}{2}$

$x = -\frac{1}{4}$

9.

Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

i) $h(x) = \dfrac{x}{x}$ **ii)** $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2-1}$ **iii)** $g(x) = \dfrac{\frac{1}{x}+2}{|x|-2}$

Προτεινόμενη λύση

i)

Πρέπει $x \neq 0$. Άρα $D_h = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

Σχόλιο 6

ii)

Πρέπει $x^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x^2 \neq 1 \Leftrightarrow |x| \neq 1 \Leftrightarrow x \neq 1$ και $x \neq -1$

Άρα $D_f = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$

iii)

Πρέπει $x \neq 0$ και $|x| - 2 \neq 0 \Leftrightarrow$

$x \neq 0$ και $|x| \neq 2$

$x \neq 0$ και $x \neq 2$ και $x \neq -2$

Άρα $D_g = (-\infty, -2) \cup (-2, 0) \cup (0, 2) \cup (2, +\infty)$

10.

Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

i) $f(x) = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x-1}$ **ii)** $g(x) = \dfrac{\sqrt{2x-1}}{\frac{1}{x-2}+1}$

Προτεινόμενη λύση

i)

Πρέπει $1 - x^2 \geq 0$ και $x - 1 \neq 0$

$x^2 \leq 1$ και $x \neq 1$

$|x| \leq 1$ και $x \neq 1$

$-1 \leq x \leq 1$ και $x \neq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x < 1$

Άρα $D_f = [-1, 1)$

Σχόλιο 6

ii)

Πρέπει $2x - 1 \geq 0$ και $x - 2 \neq 0$ και $\dfrac{1}{x-2} + 1 \neq 0 \Leftrightarrow$

$2x \geq 1$ και $x \neq 2$ και $1 + x - 2 \neq 0$

$x \geq \dfrac{1}{2}$ και $x \neq 2$ και $x \neq 1$

Άρα $D_g = \left[\dfrac{1}{2}, 1\right) \cup (1, 2) \cup (2, +\infty)$